



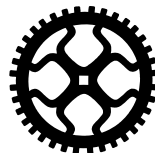
Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de Barcelona

Vibracions mecàniques

Introducció a les vibracions

Salvador Cardona
Lluïsa Jordi

1999



Departament d'Enginyeria Mecànica

Introducció

Les vibracions poden ser produïdes amb propòsits funcionals: alimentadors vibratoris, cubetes de rentat, vibradors de formigó, massatges, etc., o poden ser efectes no desitjables que es generen per multitud de causes: funcionament de màquines en general, lliscament relatiu entre superfícies, impactes, acció del vent sobre estructures - edificis, ponts, ales d'avió, etc.-, combustió no uniforme en calderes, etc.

Les vibracions generades en una font -o emissor- no hi queden localitzades sinó que es propaguen a l'entorn per mitjà de diversos camins de transmissió : canonades de les instal·lacions, suports, fonaments, aire, etc., fins arribar als receptors que poden ser equips, aparells, ... i també les persones. Pel que fa a aquestes poden percebre les vibracions pel sentit del tacte -percepció tàctil- o pel sentit de l'oïda -percepció auditiva- i en aquest cas es parla de so.

No només és el dissenyador mecànic en les seves més variades activitats -industrial, naval, aeronàutica, etc.- qui ha de prendre consciència que les vibracions cauen de ple en el seu àmbit. El tècnic de manteniment no pot ignorar que les vibracions són al mateix temps una pertorbació a corregir i un símptoma de l'estat de les seves màquines i instal·lacions. El responsable de seguretat i higiene en el treball i els responsables de medi ambient de les administracions han de tenir en compte que les vibracions, tant en la seva manifestació tàctil com auditiva, són una causa important de pol·lució ambiental que afecta el rendiment, la salut i el benestar.

2 Definicions i conceptes bàsics

Vibració. De manera general es pot entendre per vibració qualsevol moviment oscil·latori -d'un sòlid, o d'un fluid- més o menys regular a l'entorn de l'estat de repòs o d'un moviment mitjà d'arrossegament.

De fet el moviment d'un sistema es pot considerar com superposició d'un moviment d'arrossegament, el repòs n'és un cas particular, i una pertorbació d'aquest moviment. La frontera entre el moviment d'arrossegament i la seva pertorbació s'estableix, més o menys convencionalment, en funció del fenomen que es vol destacar i de la rapidesa de la variació temporal de les magnituds implicades. Així per exemple, els moviments oscil·latoris d'un vaixell -capcineig, balanceig i guinyada- poden considerar-se com vibracions si es considera la translació del vaixell com moviment d'arrossegament. Ara bé, aquests moviments no es consideraran vibracions en l'estudi de les pertorbacions ocasionades pel funcionament dels motors i el moviment d'arrossegament correspondrà al moviment global del vaixell considerat com un sòlid totalment rígid.

Una situació similar es pot trobar en estudiar un vehicle. Si el que es vol és estudiar el comportament de la suspensió es considerarà com vibració del vehicle el seu moviment al voltant de la trajectòria mitjana que faria sobre un ferm perfectament llis sense accelerar o frenar. Ara bé, si l'estudi vol contemplar l'efecte del motor probablement es considerarà com vibració dels diferents punts del xassís el seu moviment respecte al que tindrien si el xassís fos perfectament rígid o estigués en repòs amb el motor en marxa.

Vibració periòdica. Període. Freqüència. El moviment oscil·latori pot repetir-se regularment com és el cas del vaivé del pèndol d'un rellotge, o desplegar una considerable irregularitat com és el cas dels moviments sísmics.

Quan el moviment es repeteix a intervals regulars de temps $-T-$ s'anomena vibració o oscil·lació periòdica, i al temps T se l'anomena període de la oscil·lació. El nombre de vegades que una oscil·lació periòdica es repeteix per segon és la seva freqüència $-f-$ ($f = 1/T$).

Vibració harmònica. Amplitud. Angle de fase inicial. El moviment periòdic més simple és el moviment harmònic, que es pot descriure mitjançant la funció sinusoidal $x(t) = x_p \cos(2\pi f t + \varphi)$ on x_p és l'amplitud del moviment i φ és l'angle inicial.

Vibració lliure. Freqüència pròpia. Raó d'esmoreïment. Quan un sistema com el de la Fig. 1 oscil·la sense la intervenció de motors o actuadors es diu que la seva vibració és lliure. L'oscil·lació del sistema s'inicia perquè se li introdueix energia, ja sigui apartant-lo de la posició d'equilibri, donant-li una velocitat o de les dues maneres simultàniament (donant-li unes condicions inicials) i es manté perquè no hi ha forces dissipatives.

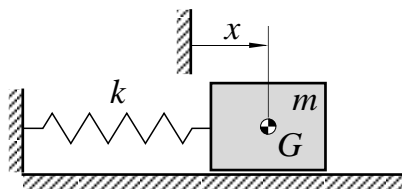


Fig. 1. Sistema massa-molla.

Si el comportament de la molla és lineal amb constant k , $F_m = k \Delta l$, la vibració lliure és sinusoidal¹ - $x(t) = x_p \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ - amb una amplitud i un angle de fase inicial que depenen de les condicions inicials donades i una freqüència f_0 -freqüència pròpia- que és característica del sistema i només depèn de la seva constant de rigidesa $-k-$ i de la seva inèrcia $-m-$

¹ L'equació del moviment de la massa m de la Fig. 1 és $m \ddot{x} + k x = 0$ i la solució d'aquesta equació diferencial és la següent expressió del text.

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

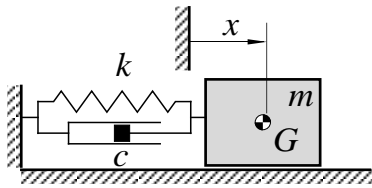


Fig. 2. Sistema massa-molla-amortidor.

En els sistemes reals l'amplitud de les oscil·lacions lliures decreix amb el temps a causa de la pèrdua d'energia introduïda per les forces dissipatives. Aquesta pèrdua d'energia es sol modelitzar mitjançant un amortidor, Fig. 2, que en principi es considera de comportament lineal de constant c , $F_c = cv$. Amb aquest amortidor l'amplitud de la vibració lliure decau exponencialment²

$$x(t) = x_p e^{-\zeta 2\pi f_0 t} \cos(2\pi f t + \varphi)$$

amb una amplitud i un angle de fase inicials que depenen de les condicions inicials i una freqüència f -freqüència d'oscil·lació- i un exponent $-\zeta 2\pi f_0 t$ que són característics del sistema i només depenen de les seves constant de rigidesa $-k-$, constant d'esmoreïment $-c-$ i inèrcia $-m-$. La freqüència d'oscil·lació f i el paràmetre ζ -raó d'esmoreïment- són

$$f = f_0 \sqrt{1 - \zeta^2} ; \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}.$$

Com més gran és l'esmoreïment del sistema més ràpid decreix l'amplitud de les oscil·lacions i aquestes són més lentes. Per tenir un ordre de magnitud de la raó d'esmoreïment es poden prendre els següents valors orientatius:

- I. En estructures d'una peça com per exemple una roda de tren, una campana o un objecte de bon cristall, tots ells sense cap mena d'esquerda, la raó d'esmoreïment és de l'ordre de les mil·lèsimes $-10^{-3}-$ o inclús menor.
- II. Les estructures de màquines amb unions cargolades, soldades, etc. en bones condicions donen lloc a raons d'esmoreïment de l'ordre de les centèsimes $-10^{-2}-$.
- III. En edificis i altres construccions és usual trobar valors de la raó d'esmoreïment a l'entorn de les dècimes $-10^{-1}-$.

² L'equació del moviment de la massa m de la Fig. 2 és $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ i la solució d'aquesta equació diferencial és la següent expressió del text.

- IV. En les suspensions de vehicles i en altres muntatges on es preveu especialment algun element dissipador d'energia la raó d'esmoreïment sol ser propera, si bé usualment lleugerament inferior, a la unitat.

En el cas de suspensions de vehicles es busca un cert esmoreïment mitjançant els amortidors per tal que les oscil·lacions del vehicle provocades per les irregularitats de la carretera i els canvis de velocitat -frenades i accelerades- desapareguin ràpidament i els passatgers no notin efectes desagradables. Si l'esmoreïment fos molt gran els passatgers notarien un efecte brusc i en canvi si fos molt petit el vehicle quedaria oscil·lant durant un temps excessiu amb la corresponent molèstia. Per altra banda, un esmoreïment petit facilitaria la pèrdua de contacte momentània entre les rodes i el terra, amb el corresponent risc que això comporta.

Quan l'esmoreïment està especialment previst com és el cas de la suspensió d'un automòbil és controlat i conegut. Ara bé, si en el sistema no hi ha cap element específic d'esmoreïment la dissipació d'energia està a càrrec de l'energia consumida en la deformació interna dels materials, usualment petita, i de l'energia consumida en altres fenòmens poc o gens controlables com poden ser: fissures, cavitats internes, jocs, lliscament en juntes, etc. Per tot això, en aquests casos poden presentar-se variacions molt importants de l'esmoreïment i no és estrany, per exemple, trobar un factor de cinc o més entre l'esmoreïment de dues màquines similars. En aquesta gran variació es basen mètodes per valorar l'estat dels components d'una peça, com per exemple la presència d'esquerdes en les rodes dels trens o en una campana que fan extingir ràpidament la vibració després de rebre un impacte.

Vibració forçada. Ressonància. Quan un sistema com el de la Fig. 3 oscil·la a causa de la intervenció de motors o actuadors es diu que la seva vibració és forçada³.

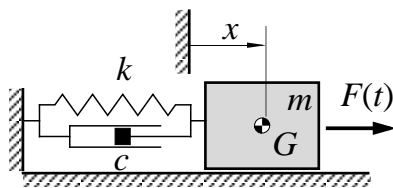


Fig. 3. Sistema massa-molla-amortidor excitat.

Si la força d'excitació és sinusoidal d'amplitud F_p i de freqüència f , $F(t) = F_p \cos(2\pi f t)$, després d'un règim transitori de posada en marxa la vibració és

³ L'equació del moviment de la massa m de la Fig.3 és $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$ i la solució d'aquesta equació diferencial és la suma de la solució de la part homogènia $-m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ per a unes condicions inicials donades més la solució particular de l'equació completa. La solució de l'homogènia descriu el transitori inicial i s'estudia com una vibració lliure que s'extingueix i la solució particular de la completa descriu el règim permanent que es manté mentre existeix força.

sinusoïdal de la mateixa freqüència, $x(t) = x_p \cos(2\pi f t + \varphi)$, i d'amplitud x_p i angle de fase inicial φ que depenen dels paràmetres del sistema i de la relació entre la freqüència de la força d'excitació i la seva freqüència pròpia, $\rho = f/f_0$ -raó de freqüència-.

$$x_p = \frac{F_p}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\rho^2)^2 + (2\zeta\rho)^2}} ; \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{2\zeta\rho}{1-\rho^2}\right) \quad (\text{Definit de } 0 \text{ a } -180^\circ)$$

$$x_{\text{est}} = \frac{F_p}{k} ; \quad FA = \frac{x_p}{x_{\text{est}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\rho^2)^2 + (2\zeta\rho)^2}}$$

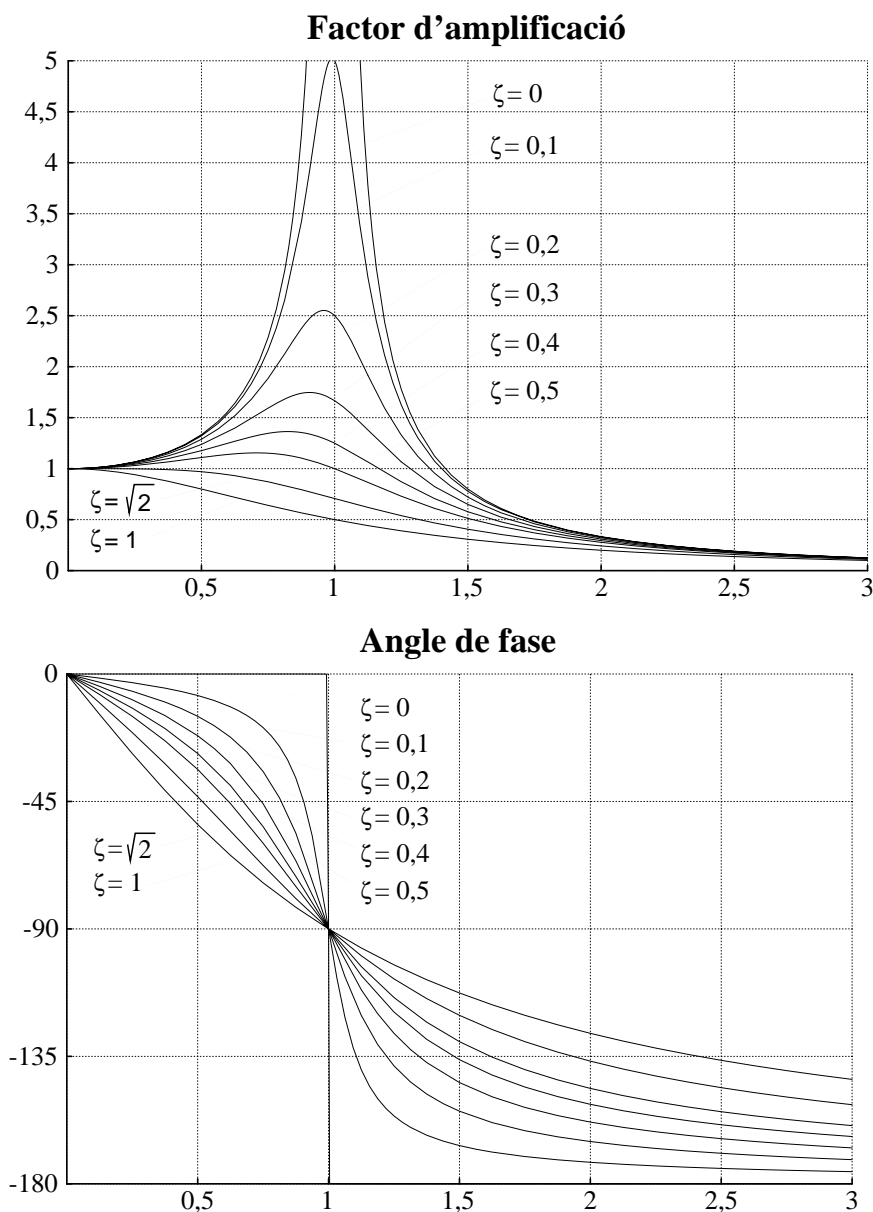


Fig. 4. Factor d'amplificació i angle de fase.

Al desplaçament x_{est} se l'anomena desplaçament estàtic ja que correspon al desplaçament del sistema si la força d'excitació fos constant. A la relació FA entre l'amplitud del desplaçament a la freqüència f i el desplaçament estàtic se l'anomena factor d'amplificació i per a un sistema donat -per tant amb f_0 i ζ coneguts- és funció només de la freqüència de la força d'excitació, Fig. 4.

Quan la freqüència de la força d'excitació coincideix amb la freqüència pròpia - $\rho = 1$ - es diu que el sistema està en ressonància. En aquesta situació el factor d'amplificació és molt proper al màxim⁴ -sobretot quan la raó d'esmoreïment és petita- i val $FA = 1/(2\zeta)$ de manera que es poden produir amplituds d'oscil·lació molt més grans que el desplaçament estàtic; així per exemple amb una raó d'esmoreïment $\zeta = 0,01$, prou usual, la vibració en ressonància és 50 vegades més gran que per a molt baixes freqüències. Així doncs, en ressonància l'amplitud de la vibració pot arribar a ser molt gran i posar en perill la integritat del sistema.

3 Causes de les vibracions forçades

Una de les causes més usuals de l'excitació de vibracions és el moviment ràpid de masses:

- I. Masses amb moviment alternatiu. Motors i compressors alternatius, premses, telers, martells pneumàtics, etc.
- II. Rotors desequilibrats estàticament i dinàmicament. Motors elèctrics, turbines, compressors i bombes rotatives, capçals de màquines-eina, reductors, etc.

En alguns dels casos mencionats l'origen de les forces és inevitable ja que està en la pròpia concepció funcional de la màquina, per exemple els motors alternatius. En certs casos un disseny adequat pot en general disminuir, si bé no anul·lar, les vibracions generades. Aquest podria ser el cas, per exemple, de col·locar masses rotatives per contrarestar les forces alternatives en un motor monocilíndric.

En altres casos es pot evitar l'origen de les vibracions a nivell de disseny sense variar l'aspecte funcional. Així, per exemple, en un plat porta-eines giratori amb una eina desplaçada respecte a l'eix de gir es pot preveure una massa addicional que l'equilibri.

Un disseny adequat és necessari però no suficient per garantir un funcionament exempt de vibracions. La no uniformitat dels materials, les toleràncies i els defectes de fabricació són causes usuals de distribucions de massa incorrectes i per tant de

⁴ El màxim del factor d'amplificació es produeix per a $\rho = 1 - 2\zeta^2$.

vibracions. Aquests defectes poden corregir-se mitjançant aportació o subtracció de massa a les peces ja fabricades -equilibratge-.

Els motors elèctrics poden generar esforços alternatius per diverses raons com poden ser:

- I. El desequilibrat del rotor, en particular causat pel bobinat.
- II. La no uniformitat dels camps magnètics de l'estator i del rotor, causada ja sigui per la configuració geomètrica dels circuits magnètics, ja sigui per desequilibris entre les fases d'alimentació.
- III. Un parell oscil·latori en els motors elèctrics monofàsics amb gàbia d'esquirol - utilitzats en gran nombre d'aplicacions domèstiques com rentadores, frigorífics, condicionadors d'aire, etc. - de freqüència doble a la de la xarxa i que depèn de la càrrega del motor.
- IV. Un parell polsant en els motors pas a pas.

En l'àmbit de les màquines elèctriques, una altra causa de vibracions són els transformadors que generen vibracions de freqüència doble a la de la xarxa.

Sense esgotar totes les possibilitats es poden encara mencionar altres causes de vibracions forçades: la combustió cíclica en motors alternatius, el rodolament -per exemple en el contacte roda-carril en trens o ponts-grua-, etc.

4 Monitoritzat per vibracions

A les màquines i instal·lacions s'incrementen les causes de vibració i n'apareixen de noves amb el temps de funcionament. Les causes més usuals són: el deteriorament de rodaments, el desgast de superfícies de lliscament -coixinets de fricció, guies, eixos, dents d'engranatges, etc.-, l'envelliment i la modificació de propietats de materials tals com plàstics i elastòmers emprats en juntes i acoblaments elàstics, etc.

La relació que hi ha entre l'estat de tots els components d'una màquina o instal·lació i la vibració que provoquen constitueix un dels fonaments de la tècnica de manteniment predictiu-preventiu basada en el monitoritzat per vibracions. La utilització del monitoritzat per vibracions com a suport del manteniment és una tècnica àmpliament emprada que ha demostrat la seva utilitat i rendibilitat -sobretot en màquines i instal·lacions d'una certa envergadura- i que té encara un camp molt ampli de noves aplicacions i de millora basada en les creixents possibilitats de mesura, anàlisi i tractament.

El monitoritzat per vibracions⁵ també s'aplica al procés productiu com a suport per al control de qualitat per tal d'establir uns límits per al nivell de vibració dels productes acabats. Aquest monitoritzat, que encara es fa manualment en certes aplicacions, cada cop està més instrumentalitzat per millorar-ne les prestacions -precisió, repetibilitat, etc.- i evitar judicis subjectius.

5 Assaigs de vibracions

Hi ha molts elements que si bé no generen vibracions -o ho fan amb un nivell molt baix- han de suportar-ne un nivell elevat ja sigui de manera esporàdica o permanent. Aquest fet es deu a causes diverses, com per exemple: els elements de la indústria auxiliar de l'automòbil -bombetes, instruments, etc.- que es munten en el vehicle i que per tant estan sotmesos a les vibracions produïdes per les irregularitats del terreny i pel funcionament del motor; el transport d'equips i instruments, etc.

Aquests elements han de superar unes proves -assaigs de vibracions- on es sotmeten a vibracions per tal de garantir la seva capacitat de funcionar adequadament ja sigui durant la vibració o un cop finalitzada. Aquests assaigs estan regulats per normes.

6 Vibracions autoexcitades i les seves causes

En les vibracions excitades la freqüència del moviment està imposada per la freqüència d'excitació. Des d'un punt de vista energètic, els motors o actuadors introdueixen energia al sistema a un ritme preestablert donat per la freqüència d'excitació. Si aquest ritme d'introducció s'aproxima a la freqüència pròpia del sistema, l'amplitud del moviment pot ser molt gran i es presenta la ressonància.

Existeixen molts casos -en els quals es diu que es tenen vibracions autoexcitades- en els quals l'energia introduïda al sistema no té un ritme preestablert sinó que s'hi introdueix al ritme marcat per les oscil·lacions del propi sistema, de manera que la freqüència de vibració no ve imposada per un motor o accionament sinó per les pròpies característiques del sistema. En la Fig. 5 es mostren els elements conceptuals que constitueixen un sistema autoexcitat:

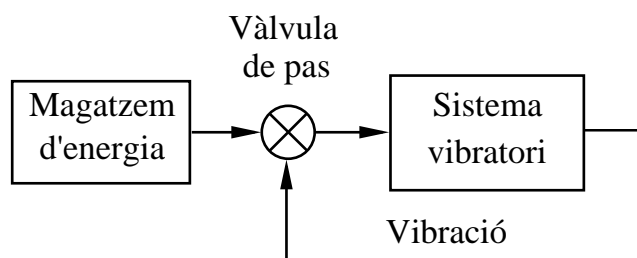


Fig. 5. Esquema del mecanisme d'autoexcitació.

⁵ Amb criteris semblants es fa servir el monitoritzat per soroll.

- I. Sistema vibratori: en principi és qualsevol sistema capaç de vibrar. Si se l'aparta de l'estat d'equilibri i se'l deixa oscil·lar lliurement l'amplitud de les seves vibracions anirà decreixent a causa de l'esmoreïment.
- II. Magatzem d'energia: dispositiu capaç de subministrar energia.
- III. Vàlvula de pas: mecanisme o fenomen físic que permet la introducció d'energia al sistema vibratori en els condicions adequades.

La vibració del sistema actua sobre la vàlvula de pas la qual dosifica l'entrada d'energia a la mateixa freqüència que la vibració. Si l'energia introduïda és superior a la dissipada en el moviment oscil·latori la vibració del sistema creix i si és inferior decreix. Si s'igualen l'energia introduïda i la dissipada la vibració s'estabilitza i es diu que el sistema està en un cicle límit.

Un exemple clàssic de vibració autoexcitada és un rellotge de pèndol. El sistema oscil·latori és el pèndol, el magatzem d'energia és l'energia potencial emmagatzemada en els pesos o les molles tensades i la vàlvula de pas és el mecanisme d'escapament.

Existeixen multitud de vibracions generades pel mecanisme d'autoexcitació descrit:

- I. L'avanç polsant -"stick-slip"- que es produeix entre superfícies lliscants: guies de màquines-eina, guies de muntacàrregues i ascensors, etc. En aquests casos pot associar-se el magatzem d'energia al motor de l'accionament. La inèrcia del sistema vibratori és la massa del carro en una màquina-eina o la massa de la cabina en el cas d'un ascensor; la rigidesa ve donada per la de la cadena de transmissió del moviment i la vàlvula de pas és el fenomen de fricció entre les superfícies lliscants.

En la Fig. 6 es presenta un possible gràfic de la força tangencial de fricció entre dues superfícies en funció de la velocitat relativa entre elles. La zona de pendent negatiu és la zona de funcionament en la que pot presentar-se l'autoexcitació (si creix la velocitat disminueix la força que s'oposa al moviment i és més senzill continuar augmentant-la).

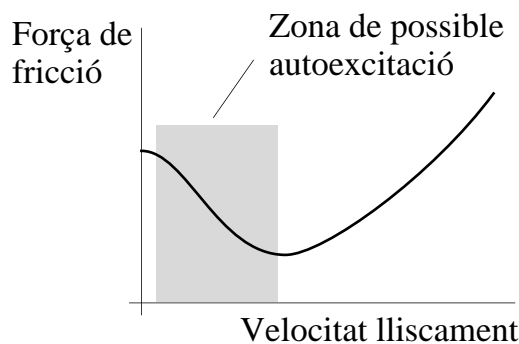


Fig. 6. Força de fricció funció de la velocitat de lliscament.

- II. Un altre exemple d'avanç polsant és el que es produeix entre els pneumàtics de les rodes d'un vehicle i el terra en una frenada brusca amb bloqueig de les rodes. L'avanç polsant del vehicle també pot produir-se per efecte de l'autoexcitació en els frens a causa de la fricció entre el tambor o disc i les sabates.
- III. Els grinyols en articulacions, frontisses, frens, embragatges, pissarres, etc. provenen del mateix principi que l'avanç polsant, si bé és característic que la seva freqüència sigui elevada a causa que les inèrcies en joc són petites i les rigideses elevades.
- IV. El fimbreg de les màquines-eina, provocat per la variació de la força de tall en variar la posició relativa entre la peça i l'eina, és una vibració autoexcitada que en moltes ocasions limita la capacitat de treball de la màquina.
- V. La inestabilitat de les rodes directrius de vehicles -"shimmy"-, de les rodes dels carretons o dels bogies dels vagons de tren -moviment de llaç- a determinades velocitats són altres casos del fenomen d'autoexcitació.
- VI. Un altre mecanisme bàsic dels fenòmens d'autoexcitació és la incidència d'un fluid en règim permanent sobre un objecte capaç de vibrar. Casos d'autoexcitació basats en aquest mecanisme són:
- L'aleteig -"flutter"- de les ales dels avions.
 - Els moviments oscil·lants de ponts penjats, estructures esveltes, cables de transport d'energia elèctrica, cables de transport de telecabines, etc.
- VII. Els processos de combustió poden ser origen de vibracions en calderes i instal·lacions a causa del mecanisme d'autoexcitació, que pot originar-se per la interacció de la fluctuació de la pressió a l'interior de la caldera amb el flux de combustible i comburent subministrats pels cremadors. En aquest cas el sistema oscil·latori és el gas de l'interior de la caldera i dels conductes d'evacuació dels gasos cremats.
- VIII. Les vibracions autoexcitades no sempre són problemàtiques; els instruments musicals clàssics -basats en la vibració de sistemes mecànics- que poden generar sons mantinguts es basen en fenòmens d'autoexcitació.
- Els instruments d'arc -violins, violoncels, violes, etc.- són un cas de lliscament polsant entre la corda i l'arc on la corda és el sistema vibratori, l'arc impulsat per l'instrumentista és la font d'energia i el mecanisme d'autoexcitació prové del fenomen de fricció entre la corda i l'arc.
- En les instruments de vent -flauta, clarinet, tenora, etc.- el sistema vibratori és la

columna d'aire de l'interior de l'instrument, la font d'energia és l'aire a pressió que subministra l'instrumentista i el mecanisme d'autoexcitació prové de:

- La incidència d'un flux laminar d'aire sobre una aresta -bisell- en les flautes.
- Una vàlvula formada pels llavis de l'instrumentista en la trompeta, trombó, etc.
- Una vàlvula -canya- constituïda per una làmina en el clarinet, saxòfon, etc. o per dues en l'oboè, fagot, tenora, etc.

Quan les vibracions autoexcitades no són desitjables, en general, és difícil eliminar-les ja que variacions no substancials de la rigidesa o de la inèrcia usualment condueixen a un canvi de la freqüència d'oscil·lació però sense una variació sensible de l'amplitud. En aquests casos és necessari analitzar quin és el fenomen que produeix l'autoexcitació i actuar sobre el paràmetres als quals és sensible. Així per exemple, un canvi de lubricació o de pretensió en les guies pot evitar l'avanç polsant. Si amb la variació possible d'aquests paràmetres no s'aconsegueix eliminar la vibració es pot recórrer a variar característiques funcionals tals com la velocitat d'avanç. Si les actuacions anteriors no resulten encara satisfactòries probablement serà necessari recórrer a un canvi de disseny com per exemple la substitució de les guies per pistes de rodolament.

7 Efectes de les vibracions

Les vibracions no només afecten les fonts de les quals procedeixen sinó que en trametre's a l'entorn afecten també màquines, edificis i altres construccions i persones.

La incidència de les vibracions es contempla en diverses normes i ordenances. Cal recordar que a l'estat espanyol són aplicables les normes estatals UNE i internacionals ISO (un llistat d'unes i altres seria molt extens i, a més, s'incrementen, modifiquen i adapten constantment per millorar-les i incorpora-hi nous coneixements i experiències). Les ordenances⁶ de les administracions tenen en compte fonamentalment l'efecte de les vibracions sobre el confort de les persones en els entorns residencials.

8 Sistemes no lineals

En major o menor grau tots els sistemes reals són no lineals, però afortunadament, a part de casos excepcionals, tractar-los com lineals proporciona un coneixement suficient del seu comportament.

Les característiques més importants dels sistemes no lineals són:

⁶ Amb la finalitat de facilitar la regulació en matèria de soroll i vibracions als municipis de Catalunya, i mentre no s'estableixin normes generals sobre aquests temes, la Generalitat ha aprovat l'Ordenança municipal tipus reguladora del soroll i les vibracions (DOGC núm. 2126 de 10/11/1995).

- I. Deixa de ser aplicable el principi de la superposició.
- II. La resposta a una excitació sinusoidal deixa de ser sinusoidal i si es manté periòdica passa a tenir més o menys harmònics.
- III. Els procediments analítics de tractament són difícils i requereixen un estudi matemàtic extens. Les solucions analítiques conegudes són escasses i la major part de solucions cal buscar-les per procediments numèrics (En certs casos es pot recórrer a mètodes aproximats com per exemple la linealització per zones). La integració a partir d'unes condicions inicials dona, si l'algorisme d'integració és robust, precís i estable, una aproximació a una solució particular, però d'una o moltes integracions difícilment se n'infereix un coneixement, ni tan sols qualitatiu, de la dinàmica d'un sistema no lineal. Per altra banda, quines condicions inicials cal imposar en una aplicació concreta?

L'estudi del comportament dels sistemes no lineals es realitza en l'espai de fases -on cada punt representa un estat del sistema- determinant propietats geomètriques de les trajectòries -estats successius- del sistema en aquest espai. Uns dels objectes més importants d'aquest espai són els atractors -punt fix, atractor periòdic o cicle límit i caòtic-, subespais als que tendeixen a convergir les trajectòries dels sistemes.

9 Sistemes de n graus de llibertat

Malgrat que un bon nombre de sistemes es poden analitzar des d'un punt de vista d'un grau de llibertat, hi ha moltes situacions en les quals aquest plantejament és insuficient, com per exemple:

- I. Quan a un sistema vibratori se li afegeix, com succeix en els absorbents dinàmics, un segon sistema per tal de modificar el comportament vibratori del primer.
- II. En un estudi detallat de la suspensió d'un cotxe cal considerar, com a mínim, per a la carrosseria 3 graus de llibertat, el desplaçament vertical i dos dels angles d'orientació -capcineig i balanceig- d'un sòlid a l'espai.

En aquest casos cal recórrer al plantejament dels sistemes de més d'un grau de llibertat -sistemes de n graus de llibertat- que si es poden estudiar com sistemes lineals porten a un formulisme matricial i d'aquí a l'estudi dels moviments desacoblats -anàlisi modal- del sistema.

10 Vibracions torsionals

En els rotors poden aparèixer moviments oscil·latoris de rotació al voltant del seu eix -vibracions torsionals- que provoquen esforços de torsió.

Aquestes vibracions, excitades usualment per parells -resistents o motors- variables, poden ser importants i passar desapercebudes fora del rotor ja que el moviment de rotació pot no necessitar de la intervenció de forces exteriors en els suports.

11 Bibliografia

Thomson, W.T. (1981). *Teoria de vibraciones. Aplicaciones*. Mexico: Prentice-Hall.

Rao, S.S. (1995). *Mechanical Vibrations*. USA: Addison-Wesley Company.

Dimarogomas, A.D., Haddad, S. (1992). *Vibration for Engineers*. USA: Prentice-Hall.

Benson H.T. (1996). *Principles of vibration*. New York: Oxford: University Press.

Cardona, S., Daumal, F. (1998). *L'impacte ambiental del so i les vibracions*. En: Medi ambient i tecnologia. Guia ambiental de la UPC. Barcelona: Edicions UPC.